

UMA FORMULAÇÃO GENERALIZADA DE CAMADA LIMITE PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO FORÇADA DE FLUIDOS POWER-LAW

José Maria Oliveira Miranda
Daniel Onofre de Almeida Cruz
Carlos Edilson Manescky
Emanuel Negrão Macêdo

Departamento de Engenharia Mecânica - CT/Universidade Federal do Pará - UFPA
Campus Universitário do Guamá, Rua Augusto Corrêa, 01
66075-900, Belém, PA, Brasil.

Resumo. *As características não-Newtonianas de certos materiais ocorrem em muitas aplicações industriais, como estrusão de polímeros, cosméticos etc. A formulação de camada limite é a mais popular entre todas para o estudo de muitos tipos de escoamentos, entretanto em muitas situações, como no ponto de separação da camada limite, esta formulação apresenta limitações. Neste trabalho, uma formulação generalizada de camada limite é utilizada na análise de convecção forçada de fluidos não-Newtonianos Power-Law. Nesta formulação a clássica divisão do escoamento em duas regiões viscosa e não viscosa desaparece, tornando desnecessário qualquer tipo de interação viscosa não viscosa. A equação diferencial parcial resultante é reduzida a uma equação diferencial ordinária, com a transformação adequada de uma variável similar, analogamente a transformação usada na dedução da equação de Falkner-Skan, a qual é um caso particular da presente formulação. As expressões resultantes são resolvidas numericamente e os resultados são apresentados para vários valores do índice do comportamento reológico do modelo da Lei de Potência (N), mostrando sua influência na transferência de calor na parede.*

Palavras-chave: *Camada Limite, Fluido da Lei de Potência, Convecção forçada*

1. INTRODUÇÃO

A análise do escoamento de fluidos não-Newtonianos é de grande importância no tratamento de inúmeros problemas de engenharia, principalmente nas engenharias química e mecânica. No entanto, para que se possa ter uma descrição detalhada deste tipo de escoamento é necessário que se resolva as equações do movimento, juntamente com um modelo reológico adequado ao fluido não-Newtoniano estudado (Sckelland, 1967). Como as

equações que descrevem o escoamento destes fluidos são geralmente de difícil resolução devido, principalmente, a não linearidade adicional nos termos difusivos resultante das equações constitutivas. Neste contexto, é de grande valia o desenvolvimento de modelos simplificados, mais que ainda descrevam adequadamente o fenômeno a um baixo custo.

No presente trabalho, será utilizada a formulação generalizada de camada limite para fluidos não-Newtonianos Power-Law desenvolvida por Miranda, Cruz & Macêdo (1998) que se baseia no método da variável intermediária (Kaplun, 1967). Desta forma, os perfis de velocidades obtidos por tal formulação serão empregados na resolução da equação de camada limite térmica. A equação diferencial parcial da camada limite térmica é, então, reduzida a uma equação diferencial ordinária através de uma mudança adequada de variável e resolvida numericamente. Os resultados obtidos são apresentados para vários valores do índice de comportamento reológico do fluido, mostrando sua influência na camada limite térmica.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 A camada limite fluidodinâmica

O escoamento de fluidos não-Newtonianos Power-Law para o caso estacionário e incompressível é descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais parciais abaixo (Miranda, Cruz & Macêdo, 1998)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}' } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^N \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Onde, $\text{Re}' = \frac{U^{2-N} L^N}{K'}$ é o número de Reynolds para fluidos Power-Law, L é um comprimento característico do escoamento e K' é a relação entre o coeficiente de rigidez do fluido Power-Law, K , e sua massa específica, ρ .

O conjunto de equações (1) - (3) pode ser utilizado para a análise de diversos tipos de escoamento fornecendo bons resultado, principalmente nos casos envolvendo separações nos quais a singularidade existente na formulação clássica de camada limite deve ser removida.

Substituindo a definição de função corrente no sistema (1) - (3) teremos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{\text{Re}' } \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^N \quad (4)$$

A Eq. (4) pode ser transformada em uma equação diferencial ordinária através da seguinte mudança de variável:

$$\eta = y^{N+1} \sqrt{\left(\frac{1-m(1-2N)}{N(N+1)} \right)^{mN-m+1} \text{Re}' x^{2m-mN-1}} \quad (5)$$

$$\xi = N+1 \sqrt{\left(\frac{N(N+1)}{1-m(1-2N)}\right)^{2(mN-m+1)} \frac{1}{\text{Re}^2} x^{2mN-4m-2N}} \quad (6)$$

$$\lambda = 1 - \xi \quad (7)$$

$$\psi = N+1 \sqrt{\left(\frac{N(N+1)}{1-m(1-2N)}\right)^{mN-m+1} \frac{1}{\text{Re}} x^{2mN-m+1}} \quad (8)$$

Substituindo as relações (5) - (8) na Eq. (3) tem-se:

$$\begin{aligned} & (m+h)F'F''+(h-m)FF'''-B\left((N-1)F''^2+F''^{N-2}+F''^{N-1}F'''\right)+A\left[h^3+3h^2+2h-5mh-hm^2\right]\eta F'^2+ \\ & \left(mh^2-2h^2-h^3\right)\eta^2 F'F''+\left(3mh^2+5mh-2m^2h-2m^2+2m-h^3-3h^2-2h\right) \\ & FF'+\left(mh^2-2hm^2+mh+h^3-h^2\right)\eta FF''+\left(h^3-mh^2\right)\eta^2 FF'''=0 \end{aligned} \quad (9)$$

Onde,

$$F^{(j)} = \frac{\partial^j F}{\partial \eta^j} \quad (9a)$$

$$h = \frac{2m-mN-1}{N+1} \quad (9b)$$

$$A = N+1 \sqrt{\left(\frac{N(N+1)}{1-m(1-2N)}\right)^{2(mN-m+1)} \frac{1}{\text{Re}^2} x^{2(mN-m-N)}} \quad (9c)$$

$$B = N \left(\frac{1-m(1-2N)}{N(N+1)}\right)^{mN-m+1} \quad (9d)$$

A Eq. (9) esta sujeita as seguintes condições de contorno:

$$F(0, \lambda) = 0.0 \quad (10)$$

$$F'(0, \lambda) = 0.0 \quad (11)$$

$$F'(\eta_\infty, \lambda) = 1.0 \quad (12)$$

$$F''(\eta_\infty, \lambda) = 0.0 \quad (13)$$

Onde η_∞ representa um valor de η considerado no infinito. O procedimento utilizado aqui é semelhante ao empregado na equação de camada limite para a obtenção da expressão de Falkner-Skan. No presente caso contudo, a Eq. (9) não pode ser considerada formalmente como uma equação similar pois não possui todos os seus coeficientes como sendo constantes, isto no entanto não impede que ela possa ser resolvida como uma equação diferencial ordinária, pois todas as suas derivadas estão relacionadas a apenas uma variável. Sob o ponto de vista assintótico, a Eq. (9) é semelhante a uma correção de ordem superior da equação de camada limite (Van Dyke, 1962) sendo que, no presente caso, a solução do problema não foi

obtida da soma de várias equações diferenciais independentes mas, através da solução de uma única equação diferencial.

2.2 A camada limite térmica

A equação seguinte descreve o processo de transporte de calor do fenômeno do escoamento de um fluido Power-Law.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{K'}{Cp} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{N+1} \quad (15)$$

onde $\alpha = \frac{\bar{K}}{\rho Cp}$

As variáveis u , v , x , y , K' e N representam o mesmo que no caso fluidodinâmico, T representa a temperatura, \bar{K} é a difusividade térmica, ρ é a massa específica do fluido, Cp é o calor específico a pressão constante.

Podemos utilizar os dados obtidos na formulação fluidodinâmica para placa plana ($m=0$) para resolver a Eq.(15) semelhante ao procedimento utilizado por Pohlhausen (1921). A Eq. (15), assim como a Eq. (9), também pode ser reduzida a uma equação diferencial ordinária, utilizando-se e a seguinte mudança de variável:

$$\eta_2 = \phi y^{N+1} \sqrt{\left(\frac{1-m(1-2N)}{N(N+1)} \right)^{mN-m+1} \text{Re}' x^{2m-mN-1}} \quad (16)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{P}} \left(\frac{1}{R_e'} \right)^{\frac{N^2-N}{2(N+1)(2-N)}} \left(\frac{U}{L} \right)^{\frac{N-1}{2}} \quad (17)$$

Assim, utilizando a Eq. (16) e dados da parte fluido dinâmica na Eq. (15) obteremos a equação diferencial ordinária (18).

$$\frac{P}{N+1} F\theta' + \theta'' = -P E (F')^{N+1} \quad (18)$$

Onde, P é o número de Prandtl, E é o número de Eckert e,

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (19)$$

$$\theta^{(n)} = \frac{d^n \theta}{d\eta_2^n} \quad (20)$$

A Eq. (18) está sujeita as seguintes condições de contorno:

$$\theta(0)=1.0 \quad (21)$$

$$\theta(\eta_{2\infty})=0.0 \quad (22)$$

3. RESULTADOS

3.1 A camada limite fluidodinâmica

Os resultados obtidos para os perfis de velocidade são apresentados abaixo para vários valores de número de Reynolds (Re') e do índice Power-Law (N) e para $m = 0$, o qual representa a situação de escoamento sobre uma placa plana.

A Fig. 1 mostra a solução da Eq. (9) para o caso de escoamento de um fluido Newtoniano ($N = 1$) sobre uma placa plana para vários valores do parâmetro ξ , fixando-se $x = 1$. Como se pode notar, a solução de Blasius é um caso particular da presente formulação, representando o limite assintótico da solução da Eq. (9) quando $\xi \rightarrow 0$. Os demais perfis da Fig. 1 descrevem o escoamento na região próxima a ponta da placa. Os perfis de velocidade apresentam uma pequena "protuberância" próximo da parede, o que já foi observado experimentalmente e na solução das equações de Navier-Stokes entre placas (Guerrero & Cotta, 1995).

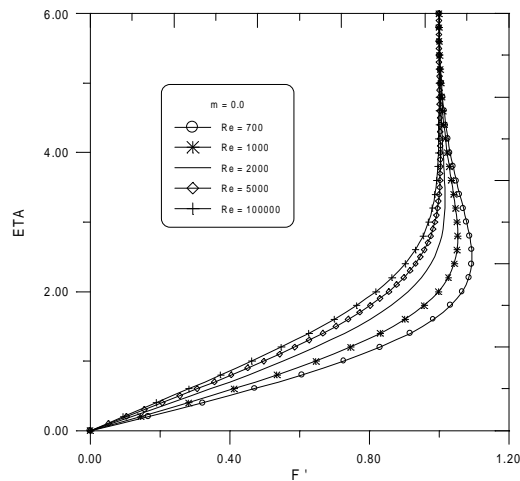


Figura 1- Perfis de velocidade para $m = 0$ e $N = 1.0$

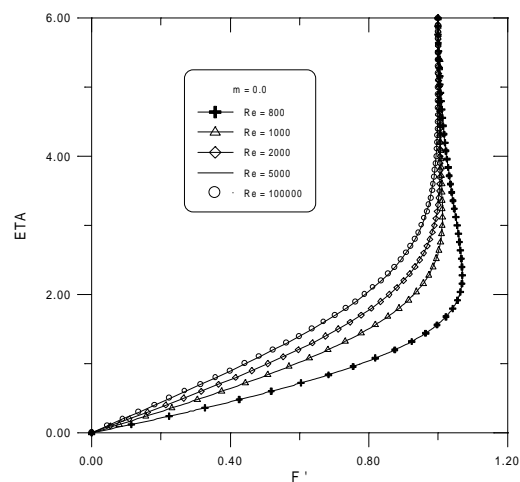


Figura 2 - Perfis de velocidade para $m = 0$ e $N = 0.9$

As Fig. 2 e 3 mostram os perfis de velocidade para o escoamento sobre uma placa plana ($m = 0$) considerando dois valores diferentes do índice de comportamento não-Newtoniano do fluido ($N = 0.9$ e $N = 1.1$), fixando-se $x = 1$.

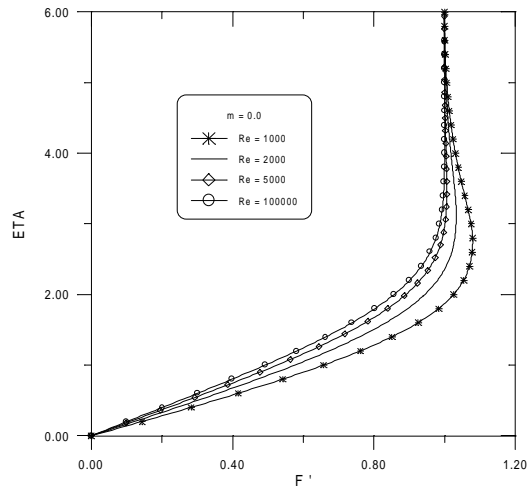


Figura 3 - Perfis de velocidade para $m = 0$ e $N = 1.1$

Na Fig 4 é possível observar a variação do coeficiente de atrito com o número de Reynolds para vários valores do índice de comportamento não-Newtoniano do fluido. Pode-se observar que o valor do índice de comportamento reológico do fluido influencia diretamente na magnitude da tensão na parede, a qual pode ser vista abaixo.

$$Cf = \frac{2 F''(0)}{N+1\sqrt{Re'}} \quad (23)$$

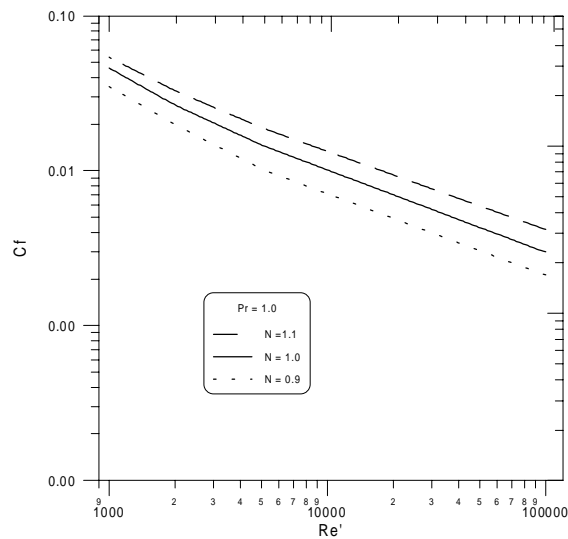


Figura 4 - Coeficiente de arrasto, Cf , em função do número de Reynolds para vários valores do índice N e $Pr=1.0$

3.2 A camada limite térmica

Os resultados obtidos para os perfis de temperatura adimensional são apresentados abaixo para vários valores de número de Reynolds (Re) e do índice do comportamento reológico do fluido (N). A obtenção dos perfis de temperatura nos permitirão fazer uma avaliação do calor do coeficiente de transmissão de calor por convecção, h .

Todos os resultados obtidos pela solução numérica da Eq. (18) foram para valores fixos de número de Prandtl, $P = 1$, e do número de Eckert, $E = -0.015$ (Schlichting, 1967). Tais valores foram impostos neste trabalho para que fosse possível validar a formulação aqui apresentada.

Como pode ser observado na Fig. 5, para o índice $N = 1$, existe uma pequena variação do perfil de temperatura a medida que se aumenta o número de Reynolds. Variações maiores do perfil de temperatura podem ser esperadas para valores do número de Eckert, as quais serão mostradas em publicações futuras.

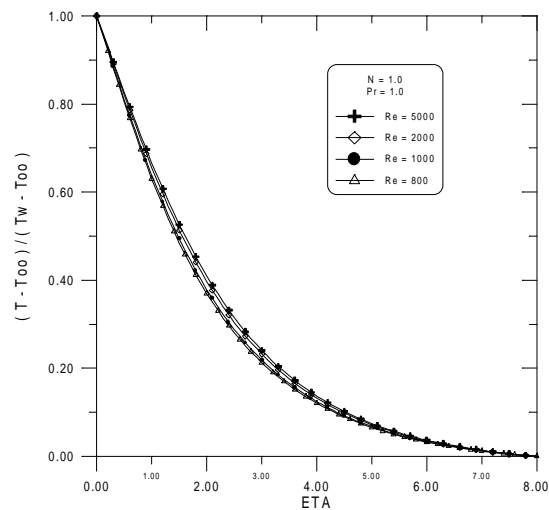


Figura 5 - Perfis de temperatura para $m=0$, $Pr=1.0$ e $N=1.0$

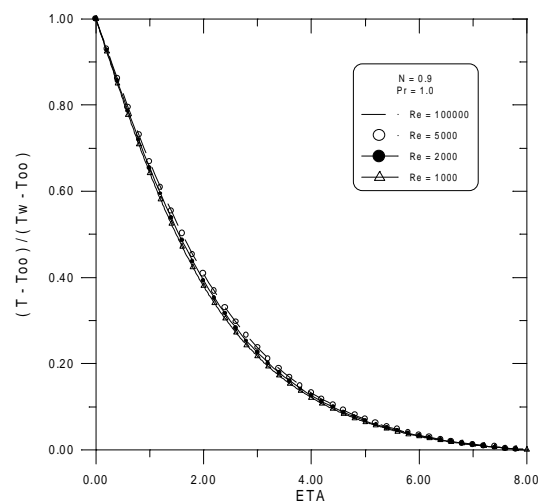


Figura 6 - Perfis de temperatura para $m=0$, $Pr=1.0$ e $N=0.9$

Para valores do índice N diferentes da unidade, Fig.6 e Fig. 7, o comportamento descrito na Fig.5 para $N=1.0$ é mantido, embora as variações dos perfis de temperatura sejam menos acentuadas.

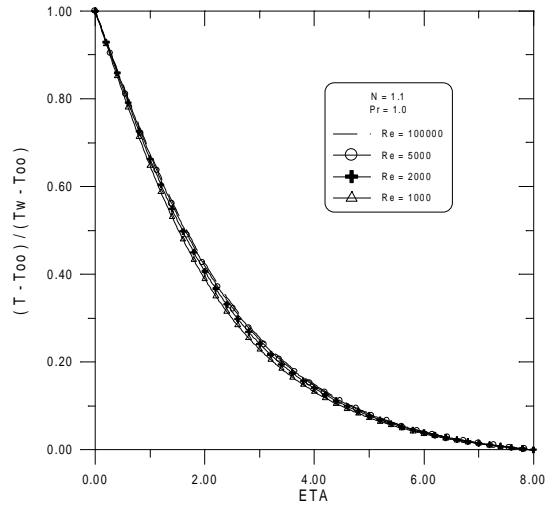


Figura 7 - Perfis de temperatura para $m=0$, $Pr=1.0$ e $N=1.1$

Na Fig. 8, tem-se uma medida do coeficiente de transmissão de calor por convecção, h , através do número de Stanton (St) que mostra claramente a variação de tal coeficiente com os valores do número de Reynolds e do índice de comportamento reológico do fluido (N). Pode-se observar, como no caso do coeficiente de atrito, que o número de Stanton varia diretamente com N .

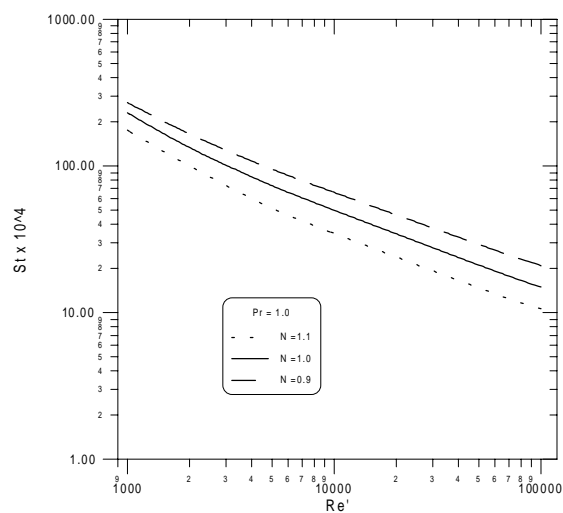


Figura 8 - Número de Stanton, St , em função do número de Reynolds para vários valores do índice N e $Pr=1.0$

4. CONCLUSÃO

No presente trabalho, uma formulação alternativa para a descrição da camada limite foi aplicada na análise do escoamento e da transferência de calor de fluidos não-Newtonianos tipo Power-Law. Nesta formulação, é dispensado qualquer processo iterativo viscoso não viscoso adicional, pois tais efeitos já estão implicitamente considerados. A equação diferencial ordinária "quase-similar" obtida, Eq. (9), descreve o escoamento de fluidos Power-Law submetido a um gradiente de pressão, semelhante a equação de falkner-Skan (Schlichting, 1967) para fluidos Newtonianos, sendo que a Eq. (9) apresenta características mais gerais como mostrado por Miranda, Cruz & Macêdo (1998).

A Eq. (18) foi utilizada para descrever o comportamento do perfil de temperatura para fluidos tipo Power-Law. Tal equação possui características semelhantes a equação de camada limite térmica para fluidos Newtonianos sendo esta, no entanto, influenciada pelo índice N . Tal índice influencia de forma bastante evidente no coeficiente de transferência de calor por convecção entre a placa e o fluido como pode ser observado na Fig. 8. Os resultados obtidos aqui indicam que a formulação alternativa de camada limite pode ser utilizada com sucesso na análise fluidodinâmica e térmica de fluidos não-Newtonianos, que seguem o modelo da Lei de Potência, proporcionando resultados mais gerais que na formulação clássica de camada limite.

5. REFERÊNCIAS

- Dyke, M.V., 1962, "Higher Approximations in Boundary Layer Theory Part. I General Analysis", J. Fluid Mech, pp. 162-177.
- Guerrero, J.S.P and Cotta, R.M., 1995, "Integral Transform Solution of Developing Laminar Duct Flow in Navier-Stokes Formulation", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pp. 1203-1213.
- Kaplun, S., 1967, "On Approximation of Double Limits by Single Limits and the Kaplun Extension Theorem", J. Inst. Maths Appls, vol. 3, pp. 245 -249.
- Schlichting, H., 1967, "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill Book Company, New York.
- Skelland, A.H.P., 1967, "Non-Newtonian Flow and Heat Transfer", John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Miranda, M.O.M, Cruz, D.O.A., Macedo, E.N., 1998, "Análise do Escoamento de Fluidos Tipo Lei de Potência através de uma Formulação Generalizada de Camada Limite", ENCIT - Encontro Nacional de Ciências Térmicas.
- Pohlhausen, E., 1921, "Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung", ZAMM, Vol. 1, p. 115.

A GENERALIZED BOUNDARY LAYER FORMULATION TO FORCED CONVECTION HEAT TRANSFER OF POWER-LAW FLUIDS

The non-Newtonian behavior of certain materials occurs in several industrial applications, namely polymer extrusion, greases, cosmetics and drilling muds. The boundary layer formulation is a very popular tool. to study such type of flows, although in some situations, as at the boundary layer separation point, this formulation presents some limitations. In this work a generalized boundary layer formulation is utilized in the analysis of the forced convection of non-Newtonian Power-Law fluids. In this formulation the classic division of the flow field in viscous and inviscid regions disappears, making unnecessary any type of viscid-inviscid interaction. The resulting partial differential equations are reduced into a set of ordinary equations, trough a similar variable transformation, analogously the transformation used in the deduction of the Falkner-Skan equation, which is a particular case of the present formulation. The resulting expressions are solved numerically and the results are presented for many values of the Power-Law index (n), showing its influence in the heat transfer coefficient at the wall. Also a study of the temperature field at the separation region will be made.

Key Words: *Boundary Layer, Power-Law fluids, Forced Convection*